

## Matematica finanziaria: svolgimento della prova di esonero del 27 marzo 2006

1. Dire, motivando la risposta, quali tra le seguenti funzioni possono descrivere regimi finanziari:  $f(t) = e^t$ ,  $f(t) = e^t + 1$ ,  $f(x, y) = (1 + 2y)/(1 + 2x)$ ,  $f(x, y) = (1 + 2y)/(1 + 3x)$ .

**Svolgimento.** Il requisito minimo affinché una funzione descriva un regime finanziario è che una quantità di denaro che vale *tot* a un certo istante, valga *tot* in quell'istante! Tradotto in termini di fattore di capitalizzazione, questa condizione diventa  $f(0) = 1$  per funzioni in una variabile, e  $f(x, x) = 1$  per funzioni in due variabili. Poiché  $e^0 = 1$ ,  $e^0 + 1 = 2 \neq 1$ ,  $(1 + 2x)/(1 + 2x) = 1$  e  $(1 + 2x)/(1 + 3x) \neq 1$ , otteniamo che solo  $f(t) = e^t$  e  $f(x, y) = (1 + 2y)/(1 + 2x)$  descrivono regimi finanziari. ■

2. Il regime finanziario  $r(t) = 1/(1 + t)$  è particolare: spiegare perché.

**Svolgimento.** La funzione è decrescente, cosa che si verifica facendo la derivata e studiandone il segno ( $f'(t) = -1/(1 + t)^2$ , negativa ove definita perché opposto di un quadrato), dunque investendo in questo regime finanziario si perde capitale! ■

3. Determinare *senza fare alcun conto* se è preferibile investire 100€ per 15 mesi in regime lineare al tasso 10%, o in regime esponenziale allo stesso tasso.

**Svolgimento.** I grafici dei due regimi si intersecano per  $t = 1$ , e per  $t > 1$  il grafico di  $(1 + i)^t$  sta sopra al grafico di  $1 + it$ , dunque conviene il regime esponenziale ogniqualvolta la durata dell'investimento superi 1 (il testo dell'esercizio è ambiguo, in quanto non si specifica l'unità di misura temporale relativa al tasso 10%: se il 10% fosse un tasso biennale, ad esempio, converrebbe investire in regime lineare perché 15 mesi è minore di 1 biennio!) ■

4. Quanto dobbiamo investire oggi per essere sicuri di avere 100€ tra un anno, in regime lineare con tasso mensile del 2%?

**Svolgimento.** Basta risolvere l'equazione  $x(1 + 0.04 \cdot 12) = 100$ . ■

5. Un capitale di 500€ può essere investito per tre anni nei seguenti modi.

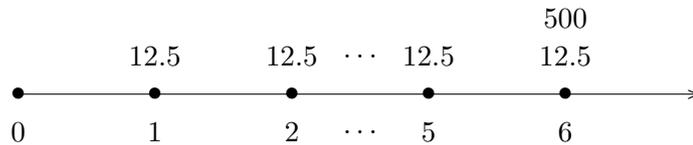
- (a) In regime esponenziale, al tasso annuale di interesse del 4%.  
(b) In regime esponenziale, al tasso nominale annuo del 5% pagabile semestralmente, e reinvestendo le cedole in regime lineare al tasso mensile del 2%.

Calcolare il montante dopo tre anni in entrambe le ipotesi di investimento.

**Svolgimento.** Il punto (a) è immediato. Il montante è

$$M_a = 500(1 + 0.04)^3 = 562.432.$$

Nel caso (b), invece, si ha a che fare con un tasso d'interesse *nominale*: 5% di 500€ significa 25€ "all'anno", e pagabili semestralmente significa che ogni 6 mesi si incasserà una cedola di 12.5€. Alla fine del periodo d'investimento, inoltre, ci verrà restituito il capitale iniziale di 500€. Il grafico di questo investimento è dunque



Usiamo come unità di misura il semestre perchè il reinvestimento è fatto in regime lineare, e il tasso mensile del 2% si trasforma senza alcuna fatica in tasso semestrale del 12%!

I ricavi intermedi (le cedole semestrali di 12.5€) vanno reinvestiti tramite la legge  $r(t) = (1 + 0.12)^t$  (dove  $t$  misura il tempo, come già detto, in semestri). La prima cedola essendo capitalizzata per 5 semestri, fornirà un montante di  $12.5 \cdot (1 + 0.12)^5$ , la seconda fornirà un montante di  $12.5 \cdot (1 + 0.12)^4$ , e così via. Il montante finale sarà

$$\begin{aligned} M_b &= 12.5 \cdot (1 + 0.12)^5 + 12.5 \cdot (1 + 0.12)^4 + \dots + 12.5 \cdot (1 + 0.12) + 12.5 + 500 \\ &= 12.5 \cdot \frac{1.12^6 - 1}{0.12} + 500 = 601.44. \end{aligned}$$

■

6. Calcolare il montante tra 4 mesi di 200€, sapendo che il tasso istantaneo di interesse  $\delta(t)$  (con  $t$  che misura gli anni) è dato da

$$\delta = \begin{cases} 0.10 & \text{il primo mese} \\ 0.20 & \text{il restante periodo} \end{cases}$$

**Svolgimento.** Il montante alla fine del primo mese è  $200e^{0.10/12}$ , e dopo altri tre mesi diventa

$$200e^{0.10 \cdot (1/12)} e^{0.20 \cdot (3/12)} = 212.014$$

■

7. Calcolare la forza di interesse della legge finanziaria  $r(x, y) = e^{y^2 - xy}$ , e dire se  $r(x, y)$  è scindibile.

**Svolgimento.** La forza di interesse in due variabili è  $r_y(x, y)/r(x, y)$ :

$$\delta(x, y) = \frac{r_y(x, y)}{r(x, y)} = \frac{(2y - x)e^{y^2 - xy}}{e^{y^2 - xy}} = 2y - x.$$

Poiché  $\delta(x, y)$  dipende da  $x$ , il regime non è scindibile.

■